UDK:627.823.3:389.64:77.028:368:616-076.21:65.012.23:331.463:51-7:519.673
doi: 10.5937/tokosig2002007R

Prof. dr Nebojša M. Ralević[1]

KONSTRUKCIJA MERE c-KREDIBILITETA I PRIMENA U OSIGURANJU

ORIGINALNI NAUČNI RAD

Apstrakt

Teorija kredibiliteta pruža alat za modeliranje različitih pojava u osiguranju. Promene životnih okolnosti kao što je pandemija i posledice što ih ona nosi same po sebi traže prilagođavanje starih i stvaranje novih teorija koje bi poboljšale postojeće parametre u modeliranju pojava u osiguranju i aktuarskoj analizi. Tako se korišćenjem mere c-kredibiliteta pokušava odgovoriti na neke od izazova koji su se pojavili. U radu je izložena skraćena teorija c-kredibiliteta i dat algoritam za konstrukciju mere c-kredibiliteta, koji je ilustrovan primerom.

Ključne reči: *ekvilibrijum, fazi komplement, mera c-kredibiliteta*

I. Uvod

Osiguranje povezuje teoriju različitih naučnih disciplina i praksu, pa je samim tim i aktuarstvo multidisciplinarno, te predstavlja spoj nauke i praktične primene. Teorija kredibiliteta i njene metode pokazale su se kao veoma korisne u mnogim aktuarskim analizama, tako da se primenjuju od samih početaka razvoja aktuarstva. Prvi radovi bavili su se procenama srednje vrednosti učestalosti šteta pomoću klasičnih i empirijskih procedura kredibiliteta.[2] Kasnije su različiti autori razvijali formule za kredibilitet uglavnom kod šteta, uključujući i Bajesove procedure kredibiliteta. Međutim, koncepti kredibiliteta upotrebljavaju se i u drugim aktuarskim poslovima, tako da se danas kredibilitet može koristiti za određivanje cene osiguravajućeg pokrića, izračunavanje premijske stope osiguranja, utvrđivanje buduće premijske stope na osnovu iskustva i rezervisanja, prilagođavanje tablica mortaliteta i dr.

Teorija kredibiliteta zasniva se na matematičkim odnosno statističkim osnovama i verodostojnim podacima. Kredibilitet pruža alat za bavljenje slučajnim

[1] Fakultet tehničkih nauka, Univerzitet u Novom Sadu
I-mejl: nralevic@uns.ac.rs
Rad je primljen: 31.05.2020.
Rad je prihvaćen: 03.06.2020.

[2] Albert H. Mowbray, *How extensive a payroll exposure is necessary to give a dependable pure premium?*, Proceedings of the Casualty Actuarial Society, 1914.

promenljivama tj. podacima koji se koriste za predviđanje budućih događaja. Standardom aktuarske prakse (ASOP 25[3]) obezbeđene su smernice za aktuare prilikom izvršavanja aktuarskih usluga u pogledu izbora ili razvoja procedura kredibiliteta i primene tih procedura na skupove podataka. U Standardu su date definicije pojmova koji se koriste u kredibilitetu, kao i preporučene prakse pri izboru, razvoju ili upotrebi kredibiliteta i aktuarskoj proceni. Subjektivnost aktuara u oceni određenih parametara jeste neizbežna, kako zbog nedostataka podataka, neodređenosti pojava u određenim zadacima, zahteva modela, ali i visokog stepena složenosti posmatranog problema. Zbog toga metode fazi matematike nalaze sve veću primenu u različitim segmentima teorije i prakse osiguranja.

Poslednjih godina osiguravajuća društva i razni fondovi posvećuju veću pažnju novim pojavama koje se dešavaju, kao što je kovid 19, koje se pak reflektuju u osiguranju (povećana smrtnost starih lica), na primer u penzijskim planovima. Varijabilnost stope smrtnosti unutar različitih demografskih grupa i/ili populacija unutar planova rezultira potrebom da se pretpostavke preispitaju i bolje prilagode konkretnim grupama. To povećava interesovanje za nove teorije kao što je npr. klasična teorija kredibiliteta, ali i novije teorije c-kredibiliteta, kao što su, na primer, sredstva za prilagođavanje standardnih tablica mortaliteta konkretnim penzijskim planovima, odnosno populaciji obuhvaćenoj tim planovima.[4]

U drugoj sekciji uvedeni su pojmovi fazi komplementa i njegovog ekvilibrijuma. Takođe su navedene i osobine vezane za njih, a sve u svrhu aksiomatskog zasnivanja mere c-kredibiliteta. Za razliku od mnogo poznatije mere skupa događaja – verovatnoće koja je aditivna, ova mera u opštem slučaju to nije. Ona spada u klasu tzv. neaditivnih mera, to jest fazi mera. Zavisi ne samo od skupa koji se razmatra već i od pomenutog fazi komplementa i odgovarajućih parametara što omogućavaju da se dobrim odabirom postigne željena tačnost modela. Takođe, navedene su neke osobine te mere, od kojih je za primenu najpogodnija teorema o ekstenziji. U trećoj sekciji dat je algoritam konstrukcije mere c-kredibiliteta zasnovan na teoremi ekstenzije. Ceo predloženi algoritam ilustrovan je na primeru. U četvrtoj sekciji data su zaključna razmatranja.

II. Mera c-kredibiliteta

Definisanje mere c-kredibiliteta zahteva preliminarno objašnjenje pojmova koji su za to potrebni.

Funkcija $c:[0,1]\rightarrow[0,1]$ jeste *fazi komplement* ukoliko su zadovoljeni sledeći uslovi:

c1) $c(0)=1$, $c(1)=0$ (granični uslovi)

[3] Actuarial Standard of Practice No. 25. *Credibility Procedures Applicable to Accident and Health, Group Term Life and Property/Casualty Coverage.*

[4] Pogledati rad Marija Paunović, Vladimir Gajović, (2020). „Adjustment of mortality tables by Limited fluctuation method", *Tokovi osiguranja 36* (1), 16–24.

c2) $(\forall a,b\in[0,1])\ a\le b\Rightarrow c(a)\ge c(b)$ (monotonost).

Ako za sve $a\in[0,1]$ iz [0,1] važi $c\left(c\left(a\right)\right)=a,$ onda je komplement *c* *involutivan*.

Ako je *c* neprekidna funkcija, tada kažemo da je *c* *neprekidan* fazi komplement.

Ako je $c:[0,1]\rightarrow[0,1]$ involutivna, monotono nerastuća funkcija, tada sledi da je *c* neprekidna bijektivna funkcija za koju važe granični uslovi.

Ekvilibrijum fazi komplementa jeste element $\varepsilon\in(0,1)$ za koji važi $c(\varepsilon)=\varepsilon$.

Svaki fazi komplement može imati najviše jedan ekvilibrijum. Ako je *c* neprekidan fazi komplement, onda *c* ima jedinstven ekvilibrijum.

Kao primere nekih bitnih neprekidnih involutivnih fazi komplemenata navodimo standardni, Sugeno-ov i Yager-ov fazi komplement, kao i njihove ekvilibrijume:

1) $c(a)=1-a$, $\varepsilon=\dfrac{1}{2}$;

2) $c_\lambda(a)=\dfrac{1-a}{1+\lambda a},\ \lambda>-1$, $\varepsilon=\dfrac{\sqrt{1+\lambda}-1}{\lambda}\quad(\lambda\neq0)$, $\varepsilon=\dfrac{1}{2}\quad(\lambda=0)$;

3) $c_\lambda(a)=(1-a^\lambda)^{1/\lambda},\ \lambda>0$, $\varepsilon=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{1/\lambda}$.

Neka je sa *P*(Ω) označen partitivni skup nepraznog skupa Ω. Svaki njegov element zvaćemo događaj. Za aksiomatsku definiciju kredibiliteta, neophodno je svakom događaju *A* dodeliti broj *cr*(*A*), to jest kredibilitet da će se događaj *A* desiti, tako da takvo pridruživanje bude skupovna funkcija sa odgovarajućim osobinama.

Neka je $c:[0,1]\rightarrow[0,1]$ involutivan fazi komplement, čiji je ekvilibrijum ε. *Mera c-kredibiliteta* na Ω (određena sa *c*) jeste skupovna funkcija $cr:P(\Omega)\rightarrow[0,1]$ takva da važi

cr1) $cr(\varnothing)=0;$

cr2) $(\forall A,B\in P(\Omega))\ A\subset B\Rightarrow cr(A)\ \le\ cr(B);$

cr3) $(\forall A\in P(\Omega))\ cr(\overline{A})=c(cr(A));$

cr4) $cr\left(\bigcup_{j\in J}A_j\right)=\sup_{j\in J} cr(A_j),$

za proizvoljne skupove $A_j \in P(\Omega),\ j \in J,$ za koje je $\sup\limits_{j\in J} cr(A_j) < \varepsilon,$ gde je *J* proizvoljan indeksni skup. Za uređenu trojku $(\Omega, P(\Omega), cr)$ kaže se da je *prostor c-kredibiliteta*.

Primer 1. Skupovna funkcija $cr : P(\Omega) \to [0,1],\ \Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\},$ definisana sa $cr(\emptyset) = 0,\ cr(\Omega) = 1,\ cr(\{\omega_1\}) = 0.1,\ cr(\{\omega_2\}) = 0.3,$ $cr(\{\omega_3\}) = 0.4,\ cr(\{\omega_4\}) = 0.6,\ cr(\{\omega_1, \omega_2\}) = 0.3,\ cr(\{\omega_1, \omega_3\}) = 0.4,$ $cr(\{\omega_2, \omega_3\}) = 0.4,\ cr(\{\omega_1, \omega_4\}) = 0.6,\ cr(\{\omega_2, \omega_4\}) = 0.6,\ cr(\{\omega_3, \omega_4\}) = 0.7,$ $cr(\{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}) = 0.4,\ cr(\{\omega_1, \omega_2, \omega_4\}) = 0.6,\ cr(\{\omega_1, \omega_3, \omega_4\}) = 0.7,$ $cr(\{\omega_2, \omega_3, \omega_4\}) = 0.9,$ jeste mera c-kredibiliteta u odnosu na standardni fazi komplement.

Kredibilitet je regularna fazi mera, tj. cr(Ω) = 1. Takođe je 0 ≤ *cr*(*A*) ≤ 1 za bilo koji podskup *A* od Ω. Ta mera je i subaditivna, tj. (∀*A*,*B* ∈P(Ω)) *cr*(*A* ∪*B*) ≤ *cr*(*A*) + *cr*(*B*), ako je *c* involutivni fazi komplement takav da je $c(a) \geq 1 - a,$ za sve $a \in [0,1]$. Aditivna je ako i samo ako postoje najviše dva singltona u P(Ω) koji uzimaju nenula vrednost kredibiliteta. Takođe je i poluneprekidna. Za ovu meru je vrlo važna teorema ekstenzije:

Ako je $\Omega \neq \emptyset$ i $cr : P(\Omega) \to [0,1]$ mera c-kredibiliteta, tada važe tzv. uslovi ekstenzije

$$\sup_{\omega\in\Omega} cr(\{\omega\}) \geq \varepsilon \tag{1}$$

$$cr(\{\omega^*\}) \geq \varepsilon \ \Rightarrow\ \sup_{\omega\neq\omega^*} cr(\{\omega\}) = c(cr(\{\omega\})). \tag{2}$$

Sledeća teorema ekstenzije omogućava izračunavanje brojčanih vrednosti mere c-kredibiliteta za bilo koji događaj na osnovu vrednosti kredibiliteta svakog pojedinog singltona, i ona daje dovoljan uslov za meru c-kredibiliteta.

Teorema 1. Neka je $c : [0,1] \to [0,1]$ involutivni fazi komplement, sa ekvilibrijumom ε, i $cr : \{\{\omega\} | \omega \in \Omega\} \to R_0^+,\quad \Omega \neq \emptyset$ skupovna funkcija koja zadovoljava (1) i (2). Tada *cr* ima jedinstvenu ekstenziju na meru c-kredibiliteta $cr : P(\Omega) \to R_0^+$ definisanu sa

$$cr(A) = \begin{cases} \sup\limits_{\omega\in A} cr(\{\omega\}), & \sup\limits_{\omega\in A} cr(\{\omega\}) < \varepsilon \\ c\left(\sup\limits_{\omega\in \bar{A}} cr(\{\omega\})\right), & \sup\limits_{\omega\in A} cr(\{\omega\}) \geq \varepsilon \end{cases} \tag{3}$$

za neprazan skup *A*, i *cr*(∅) = 0.

III. Algoritam i numerički primer

Pretpostavimo da osiguravajuće društvo nudi određen broj svojih usluga (paketa osiguranja), to jest neka je skup elementarnih događaja $\Omega=\{\omega_1,\omega_2,...,\omega_k\}$. Naravno, ono može ponuditi složenije pakete (neke podskupove *A* od Ω), može nuditi kompletan asortiman *A*=Ω ili ne nuditi ništa, tj. $A=\varnothing$. Želimo da odredimo kredibilitet svakog događaja, ali tako da se dobije mera c-kredibiliteta *cr*. Dakle, najpre je vrednost kredibiliteta za svaki događaj *A* broj iz intervala [0,1], kompletnog asortimana (sigurnog događaja) Ω je 1, a nemogućeg događaja $\varnothing$ je 0. Naravno, i monotonost mora biti zadovoljena, tj. većem događaju dodeljuje se veći kredibilitet. Po teoremi ekstenzije kredibiliteta (o predstavljanju *cr* preko kredibiliteta singltona – jednoelementnih skupova), bilo bi potrebno zadati mere kredibiliteta singltona. Radi lakšeg prezentovanja primera, uzećemo da važi $cr(\{\omega_1\})\le cr(\{\omega_2\})\le\ldots\le cr(\{\omega_k\})$. Ponuda asortimana treba da bude takva da samo jedan singlton (u našem slučaju $\{\omega_k\}$) može imati kredibilitet veći ili jednak od nekog ε <1, dok ostali ($\{\omega_1\},\ldots,\{\omega_{k-1}\}$) moraju imati kredibilitet manji od ε. Ponuda (usluga) $A=\{\omega_{i_1},\omega_{i_2},...,\omega_{i_r}\}$, $i_1<i_2<\ldots<i_r$ koja se pravi od njih ima kredibilitet kao i singlton s najvećim kredibilitetom, tj. $cr(A)=cr\left(\{\omega_{i_r}\}\right)$. Ako $\omega_k\in A$, tada od elemenata iz $\overline{A}$ biramo onaj čiji singlton ima najveći kredibilitet i komplement tog kredibiliteta jeste kredibilitet od *A*. Takođe, treba da bude zadovoljen i drugi uslov ekstenzije da najveći od svih kredibiliteta singltona $\{\omega_1\},\ldots,\{\omega_{k-1}\}$ mora biti jednak komplementu kredibiliteta za $\{\omega_k\}$. Dalje se dodeljuje kredibilitet preostalim singltonima. Postupak se nakon toga nastavlja i za višeelementne skupove na osnovu teoreme o ekstenziji.

Mera c-kredibiliteta podesna je zato što sami biramo fazi komplement i njegov ekvilibrijum. Ekspert, tj. aktuar bira koji su to elementarni događaji (paketi osiguranja) takvi da povećavanjem ponude takvim paketima ne prelazimo kredibilitet najvećeg elementarnog paketa, već ostajemo na njemu. Vrednosti kredibiliteta takvih paketa ne prelaze ekvilibrijum, pa i na taj način možemo doći do procene vrednosti ekvilibrijuma.

Ilustrujmo to na sledećem primeru. Za skup $\Omega=\{\omega_1,\omega_2,\omega_3,\omega_4\}$ odredimo skupovnu funkciju $cr:P(\Omega)\to[0,1]$, tako da bude c-kredibilitet. Naravno da mora biti $cr(\varnothing)=0,\ cr(\Omega)=1.$

Najpre se proceni singlton sa najvećim kredibilitetom, npr. $cr(\{\omega_4\})=0.6.$

Zatim biramo fazi komplement, npr. Sugenov, i neka njegov ekvilibrijum bude $\varepsilon=0.4<0.6$. Izbor komplementa iz klase Sugenovih komplemenata zavisan je od izbora parametra λ. Ekvilibrijum nam određuje kolika je vrednost tog parametra: $\lambda = \frac{1-2\varepsilon}{\varepsilon^2} = \frac{5}{4} = 1.25$.

Dakle, mera c-kredibiliteta definisana je u odnosu na fazi komplement $c(a) = \frac{1-a}{1+1.25a}$. Sada procenjujemo kredibilitete ostalih singltona, tako da budu manji od ekvilibrijuma. Dalje, iz uslova ekstenzije je

$cr(\{\omega_3\}) = \max(cr(\{\omega_1\}), cr(\{\omega_2\}), cr(\{\omega_3\}))=$

$c(cr(\{\omega_4\})) = c(0.6) = \frac{1-0.6}{1+1.25 \cdot 0.6} = \frac{8}{35} \approx 0.229.$

Uzmimo da je $cr(\{\omega_1\}) = 0.1,\ cr(\{\omega_2\}) = 0.2$. Koristeći (3) izračunavamo kredibilitete višeelementnih skupova:

$$
\begin{aligned}
&cr(\{\omega_1,\omega_2\}) = \max(cr(\{\omega_1\}), cr(\{\omega_2\})) = 0.2,\\
&cr(\{\omega_1,\omega_3\}) = \max(cr(\{\omega_1\}), cr(\{\omega_3\})) \approx 0.229,\\
&cr(\{\omega_2,\omega_3\}) = \max(cr(\{\omega_2\}), cr(\{\omega_3\})) = 0.229,\\
&cr(\{\omega_1,\omega_4\}) = c(\max(cr(\{\omega_2\}), cr(\{\omega_3\}))) = c(0.229) \approx 0.599,\\
&cr(\{\omega_2,\omega_4\}) = c(\max(cr(\{\omega_1\}), cr(\{\omega_3\}))) = c(0.229) \approx 0.599,\\
&cr(\{\omega_3,\omega_4\}) = c(\max(cr(\{\omega_1\}), cr(\{\omega_2\}))) = c(0.2) = 0.64,\\
&cr(\{\omega_1,\omega_2,\omega_3\}) = \max(cr(\{\omega_1\}), cr(\{\omega_2\}), cr(\{\omega_3\})) \approx 0.229,\\
&cr(\{\omega_1,\omega_2,\omega_4\}) = c(cr(\{\omega_3\})) = c(0.229) \approx 0.599,\\
&cr(\{\omega_1,\omega_3,\omega_4\}) = c(cr(\{\omega_2\})) = c(0.2) = 0.64,\\
&cr(\{\omega_2,\omega_3,\omega_4\}) = c(cr(\{\omega_1\})) = c(0.1) = 0.8.
\end{aligned}
$$

IV. Zaključak

Teorija kredibiliteta danas se intenzivno koristi u osiguranju. Može se reći da je glavni cilj primene klasične teorije kredibiliteta minimizacija grešaka između statističke ocene različitih parametara i njihove stvarne vrednosti. Teorija kredibiliteta omogućuje primenu različitih metoda i modela prilikom procene vrednosti određenih elemenata podskupa posmatrane populacije, kombinovanjem izlaznih rezultata za takav poseban podskup sa rezultatima dobijenim za populaciju u celini. Različiti modeli teorije kredibiliteta, pa i c-kredibiliteta, koriste se za modelovanje mnogih problema u osiguranju, što doprinosi povećanju pouzdanosti ocene parametara koji se javljaju. U uslovima velike konkurencije na tržištu osiguranja, svaka nova teoretska metoda, pa i teorija c-kredibiliteta kao važan alat prilikom procene rizika u osiguranju, od izuzetne je važnosti.

Literatura

- Actuarial Standard of Practice No. 25. *Credibility Procedures Applicable to Accident and Health, Group Term Life, and Property/Casualty Coverage*.
- American Academy of Actuaries, *Credibility Practice Note*, 2008.
- Baoding Liu, *Uncertainty Theory*, Springer-Verlag, Berlin, 2004.
- Marija Kerkez, Nebojša M. Ralević, „Uncertainty analysis and risk modeling in insurance“, *Insurance in the post-crisis era,* (Kočović, J. Baskakov. V. Boričić, B. et al. eds) University of Belgrade, Faculty of Economics Publishing Centre, Chapter 18, 309–326, 2018.
- Marija Paunović, *Mere neodređenosti i primena u aktuarstvu*, doktorska disertacija, Fakultet tehničkih nauka, Univerzitet u Novom Sadu, 2019.
- Marija Paunović, Vladimir Gajović, „Adjustment of mortality tables by Limited fluctuation method“, *Tokovi osiguranja* 36 (1), 16–24, 2020.
- Nebojša M. Ralević, Marija Paunović, c-Credibility Measure, FILOMAT 33:9, 2571–2582, 2019. *https://doi.org/10.2298/FIL1909571R*
- Stuart Klugman, *Sample size selection for multiple samples-A brief introduction to credibility theory and an example featuring rate-based insurance premiums*, Drake University, for presentation at NYU-March 4, 2004.
- Stuart Klugman, Thomas Rhodes, Marianne Purushotham, Stacy Gill, MIB Solutions. *Credibility Theory Practices*, Society of Actuaries, 2009.
- Zhenyuan Wang, George J. Klir, *Fuzzy measure theory,* Plenum Press, New York and London, Ister Science, Bratislava, 1995.